数理解析研究所講究録 1262 巻 2002 年 167-177

$\mathbb{Z}_2$-graded Clifford system in the Hecke algebra of type B

神奈川県立藤沢高等職業技術校　三橋秀生 (Hideo Mitsuhashi)

Fujisawa Vocational Training School

神奈川県藤沢市川名 290-2

1 はじめに

A 型ヘッケ代数 $\mathcal{H}_n(q)$ は対称群の q-アナローグとして考えることが出来、その中に交代群の q-アナローグを構成できることは、[8] で示したとおりであるが、今回はこれを B 型の場合に適用した。A 型のときと同様に生成元を変更すると、B 型においても基本関係式の偶奇性が保存され、それによってランクが元のヘッケ代数の半分であるような部分代数を構成できる。議論を見通しよくするために、この部分代数を用いてヘッケ代数に $\mathbb{Z}_2$-graded Clifford system を構成する。このような設定を行うことによって、この部分代数の理解が明確になると共に、B 型ヘッケ代数その部分代数の間にある分岐則をより一般的に求めることができる。また、同様の議論が A 型に対しても展開でき、[8] の議論を簡約化する事ができる。

2 S-graded Clifford system

S-graded Clifford system のアイデアは初めに Tucker よって 60 年代初めにもたらされ、続いて Conlon,Ward,Dade,Cline らによって 60 年代中頃から 70 年代初めにかけて拡張され、整備された。これらの一連の結果においては、正規部分群からの誘導加群の分解や正規部分群への制限に関する Clifford の定理が（ある性質を持つ代数へ）拡張された形で示されており、ヘッケ代数への適用が可能となっている。ここでは S-graded Clifford system 定義のみを与え、その一般論についての議論はしないが、詳細を知りたい方は Curtis-Reiner[3]

の 11 章C（p.267～p.279）およびそこにあるリファレンスを参照して欲しい。

S を有限群とし、R を可換環（with 1）とする。A を R 上の代数であって、加群として R 上有限生成であるとする。また、$\{A_s\}_{s\in S}$ を A の R-部分加群の族とする。

定義 2.1. $\{A_s\}_{s\in S}$ が A における S-graded Clifford system であるとは、以下の 4 条件を満たす事を言う。

(C1) $s, t \in S$ に対して、$A_sA_t = A_{st}$

(C2) 各 $s\in S$ に対して、可逆元 $a_s\in A$ が存在し、

$$A_s = a_sA_1 = A_1a_s$$

を満たす。

(C3) $A = \bigoplus_{s\in S} A_s$

(C4) $1\in A_1$

定義からわかるように、A_1 は A の部分代数である。また S-graded Clifford system は twisted group algebra の一般化になっている。

3 B 型ヘッケ代数とその部分代数

u, q を R の可逆元とする。このとき、B 型ヘッケ代数 $\mathcal{H}_{R,n}(u,q)$ は以下のような生成元と基本関係式を持つ R 上の代数である。

生成元: $a_1, a_2, \ldots, a_n$

基本関係式:

(H1) $a_1^2 = (u-1)a_1 + u$

(H2) $a_i^2 = (q-1)a_i + q \qquad \text{if } i = 2, 3, \ldots, n$

(H3) $a_1a_2a_1a_2 = a_2a_1a_2a_1$

(H4) $a_i a_{i+1} a_i = a_{i+1} a_i a_{i+1}$ if $i = 2, 3, \ldots, n$

(H5) $a_i a_j = a_j a_i$ if $|i - j| > 1$

u, q を不定元とし、$R_0 = \mathbb{Z}[u^{\pm 1}, q^{\pm 1}]$ とする。このとき、$\mathcal{H}_{R_0,n}(u,q)$ は R_0-自由加群としてランク $2^n n!$ を持つことが知られている。また、$\mathcal{H}_{R,n}(u,q)$ には以下で示される Goldman's involution とよばれる特別な自己同型 $\wedge$ がある（[5, 7]）。各生成元に対して、

$$\hat{a}_1 = (u-1) - a_1$$

$$\hat{a}_i = (q-1) - a_i \qquad \text{if } i = 2, 3, \ldots, n$$

とし、これを代数準同型に拡張する。このとき各 $\hat{a}_i$ は関係式 (H1) ∼ (H5) を満たし、さらに、

$$\hat{\hat{a}}_i = a_i$$

を満たしている。

$R_1 = \mathbb{Z}[u^{\pm 1}, q^{\pm 1}, (u+1)^{-1}, (q+1)^{-1}]$ とし、$\mathcal{H}_{R_1,n}(u,q)$ に新しい生成元を以下のように定義する。

$$b_1 = \frac{a_1 - \hat{a}_1}{u+1} \qquad b_i = \frac{a_i - \hat{a}_i}{q+1} \quad (i > 2)$$

この時、

$$\hat{b}_i = -b_i \qquad \text{for } i = 1, 2, \ldots, n$$

が成り立ち、さらに b_i を用いたヘッケ代数の関係式は以下のようになる。

命題 3.1. $b_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ は $\mathcal{H}_{R_1,n}(u,q)$ を生成し、基本関係式は以下の通りである。

(1) $b_i^2 = 1$ *if* $i = 1, 2, \ldots, n$

(2) $b_1 b_2 b_1 b_2 = b_2 b_1 b_2 b_1 - 2\dfrac{(u-1)(q-1)}{(u+1)(q+1)}(b_1 b_2 - b_2 b_1)$

(3) $b_i b_{i+1} b_i = b_{i+1} b_i b_{i+1} - \left(\dfrac{q-1}{q+1}\right)^2 (b_i - b_{i+1})$ *if* $i = 2, 3, \ldots, n$

(4) $b_i b_j = b_j b_i \qquad if\ |i-j| > 1$

次に、まず、$\mathcal{H}_{R_1,n}(u,q)$ の元から成る次のような集合を考える。

$$\mathcal{S}_1 = \{1, b_1\}$$

$$\mathcal{S}_2 = \{1, b_2, b_2 b_1, b_2 b_1 b_2\}$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{S}_i = \{1, b_i, b_i b_{i-1}, \dots, b_i b_{i-1} \cdots b_2 b_1, b_i b_{i-1} \cdots b_2 b_1 b_2, \dots, b_i b_{i-1} \cdots b_2 b_1 b_2 \cdots b_{i-1} b_i\}$$

$$\vdots$$

$$\mathcal{S}_n = \{1, b_n, b_n b_{n-1}, \dots, b_n b_{n-1} \cdots b_2 b_1, b_n b_{n-1} \cdots b_2 b_1 b_2, \dots, b_n b_{n-1} \cdots b_2 b_1 b_2 \cdots b_{n-1} b_n\}$$

このとき、$\mathcal{H}_{R_1,n}(u,q)$ に関して次のことが成り立つ。

命題 3.2.

$$\mathcal{H}_{R_1,n}(u,q) = \bigoplus_{U_i \in \mathcal{S}_i} R_1 U_1 U_2 \cdots U_n$$

これによって、$\{\mathcal{S} = U_1 U_2 \cdots U_n | U_i \in \mathcal{S}_i\}$ は $\mathcal{H}_{R_1,n}(u,q)$ の基底を成すわけだが、この中で $b_i (i = 1, 2, \dots, n)$ の偶数個の積のものの全体を $\mathcal{E}$ とおくと、$|\mathcal{E}| = 2^{n-1} n!$ であることがわかる。$\mathcal{H}_{R_1,n}(u,q)$ の R_1-部分加群 $\mathcal{H}^1_{R_1,n}(u,q)$ を以下によって定義する。

$$\mathcal{H}^1_{R_1,n}(u,q) = \bigoplus_{M \in \mathcal{E}} R_1 M$$

この時、$\mathrm{rank}_{R_1} \mathcal{H}^1_{R_1,n}(u,q) = 2^{n-1} n!$ であり、さらに、次のことが成り立つ。

命題 3.3. $n > 1$ とするとき、$\mathcal{H}^1_{R_1,n}(u,q)$ は $\mathcal{H}_{R_1,n}(u,q)$ の部分代数であり、

$$\mathcal{H}^1_{R_1,n}(u,q) = \{b \in \mathcal{H}_{R_1,n}(u,q) | \hat{b} = b\}$$

によって与えられる。

また、$\mathcal{H}_{R_1,n}(u,q)$ のもう一つの R_1-部分加群 $\mathcal{H}^{-1}_{R_1,n}(u,q)$ を以下によって定義する。

$$\mathcal{H}^{-1}_{R_1,n}(u,q) = \bigoplus_{M \in \mathcal{S} \setminus \mathcal{E}} R_1 M$$

このとき、次が成り立つ。

命題 3.4. $\{\mathcal{H}^t_{R_1,n}(u,q)\}_{t\in\{1,-1\}}$ は $\mathcal{H}_{R_1,n}(u,q)$ における $\mathbb{Z}_2$-*graded Clifford system* を成す。

4 $\mathcal{H}^1_{R_1,n}(u,q)$ の生成元と基本関係式

前章で与えられた $\mathcal{H}^1_{R_1,n}(u,q)$ の生成元と基本関係式について述べる。生成元の採り方によって基本関係式は異なる。ここでは $x_i = b_1 b_{i+1} (i = 1, 2, \ldots, n-1)$ とした場合を考える。この時、$x_i (i = 1, 2, \ldots, n-1)$ は $\mathcal{H}^1_{R_1,n}(u,q)$ を生成し、以下の関係式を満たす。

(1) $x_1^4 = 1 - 2\dfrac{(u-1)(q-1)}{(u+1)(q+1)}(x_1^3 - x_1)$

(2) $x_i^2 = 1 \quad$ if $i = 2, 3, \ldots, n-1$

(3) $(x_{i-1}x_i)^3 = 1 - \left(\dfrac{q-1}{q+1}\right)^2 \left\{(x_{i-1}x_i)^2 - x_{i-1}x_i\right\} \quad$ if $i = 2, 3, \ldots, n-1$

(4) $(x_i x_j)^2 = 1 \quad$ if $|i-j| > 1$

さらに、上記関係式 (1) ～ (4) は $\mathcal{H}^1_{R_1,n}(u,q)$ の基本関係式であることが確かめられる。ここで交代群の q-アナローグについて考える。交代群の q-アナローグは生成元 $y_1, y_2, \ldots, y_{n-2}$ によって生成され、基本関係式

(1) $y_1^3 = -\left(\dfrac{q-1}{q+1}\right)^2 (y_1^2 - y_1) + 1$

(2) $y_i^2 = 1 \quad$ for $i > 1$

(3) $(y_{i-1}y_i)^3 = -\left(\dfrac{q-1}{q+1}\right)^2 \left\{(y_{i-1}y_i)^2 - y_{i-1}y_i\right\} + 1 \quad$ for $i = 2, 3, \ldots, n-2$

(4) $(y_i y_j)^2 = 1 \quad$ whenever $|i-j| > 1$

を持つ代数である。B 型ヘッケ代数は A 型ヘッケ代数を自然に含んでいることから類推して、$\mathcal{H}^1_{R_1,n}(u,q)$ は交代群の q-アナローグを自然に含んでいるような表示である事が望

ましい。上に示した $\mathcal{H}^1_{R_1,n}(u,q)$ の表示は交代群の q-アナローグの含まれ方がはっきり見えないという点で、もう少し改善の余地があると思われる。

5 $\mathcal{H}_{\bar{K}_0,n}(u,q)\to\mathcal{H}^1_{\bar{K}_0,n}(u,q)$ 分岐則

ここでは、$\mathcal{H}_{\bar{K}_0,n}(u,q)$ と $\mathcal{H}^1_{\bar{K}_0,n}(u,q)$ の間の既約表現の分岐則を調べるため、最初に $\mathcal{H}_{K_0,n}(u,q)$ の半正規形式による既約表現の構成（Hoefsmit[6],Ariki-Koike[1]）について説明する。

$\lambda=(\lambda^{(1)},\lambda^{(2)})$ を２つのヤング図形 $\lambda^{(1)},\lambda^{(2)}$ からなる組とし、$|\lambda|$ を $\lambda^{(1)}$ と $\lambda^{(2)}$ の箱数の総和とする。形が λ の標準盤 $T=(T^{(1)},T^{(2)})$ とは、λ の箱に１から $|\lambda|$ までの数字を、$\lambda^{(1)},\lambda^{(2)}$ の各行、各列が単調増加となるように当てはめたものである。形が λ である標準盤の集合を $\mathrm{STab}(\lambda)$ とする。$K_0=\mathbb{Q}(u,q)$ とし、$\bar{K}_0$ を K_0 の代数閉包とする。V_λ を $\{v_T\mid T\in\mathrm{STab}(\lambda)\}$ を基底とする K_0- ベクトル空間とする。$a_i\in\mathcal{H}_{K_0,n}(u,q)$ に対し V_λ 上の線型変換 $\pi_\lambda(a_i)$ を以下のように定める。

(1) $i=1$ の場合

(a) 1 が $T^{(1)}$ にある場合、$\pi_\lambda(a_1)v_T=uv_T$

(b) 1 が $T^{(2)}$ にある場合、$\pi_\lambda(a_1)v_T=-v_T$

(2) $i>1$ の場合

(a) T 上、$i-1$ と i が同じヤング図形の同じ行に現れる場合、$\pi_\lambda(a_i)v_T=qv_T$

(b) T 上、$i-1$ と i が同じヤング図形の同じ列に現れる場合、$\pi_\lambda(a_i)v_T=-v_T$

(c) それ以外の場合、T において、$i-1$ と i を入れ替えたものは標準盤であり，それを $(i-1,i)T$ とおく。このとき、$\pi_\lambda(a_i)$ は V_λ の部分空間 $K_0v_T\oplus K_0v_{(i-1,i)T}$ に対して以下のように作用する。

$$\pi_\lambda(a_i)(v_T,v_{(i-1,i)T})=(v_T,v_{(i-1,i)T})M\left(d_{T,i,i-1},\frac{u_{\tau_T(i-1)}}{u_{\tau_T(i)}}\right)$$

ここで、$M\Big(k,y\Big)$ は以下で定義される 2×2 行列である。

$$M\Big(k,y\Big)=\frac{1}{1-q^ky}\begin{bmatrix} q-1 & 1-q^{k+1}y \\ q(1-q^{k-1}y) & -q^ky(q-1)\end{bmatrix}$$

$d_{T,i,i-1}$ は T における i から $i-1$ への軸性距離（axial distance）であり、i が r 行 c 列にあり、$i-1$ が r' 行 c' 列にあるとき、$c'-r'-c+r$ で定義される整数である。また、$u_1=u, u_2=-1$ とし、i は $T^{(\tau_T(i))}$ にあるとする。

定理 5.1 ([1, 6]). 上で定義した π_λ は $\mathcal{H}_{K_0,n}(u,q)$ の（絶対）既約表現となる。さらに、2 つのヤング図形の組 λ,μ に対して、$\lambda\neq\mu$ ならば π_λ と π_μ は非同値であり、$\{\pi_\lambda \mid |\lambda|=n\}$ は $\mathcal{H}_{K_0,n}(u,q)$ の（絶対）既約表現の完全代表系をなす。

$\lambda=(\lambda^{(1)},\lambda^{(2)})$ に対して、$\bar{\lambda}=({}^t\lambda^{(2)},{}^t\lambda^{(1)})$ とし、$T=(T^{(1)},T^{(2)})$ に対し、$\bar{T}=({}^tT^{(2)},{}^tT^{(1)})$ とする。また、(π_λ,V_λ) を $\mathcal{H}^1_{K_0,n}(u,q)$ へ制限したものを $(\tilde{\pi}_\lambda,\tilde{V}_\lambda)$ と記す。上で定義した $\mathcal{H}_{K_0,n}(u,q)$ の既約表現を b_i に関して表した場合を考えると次のようになる事が計算よりわかる。

(1) $i=1$ の場合

(a) 1 が $T^{(1)}$ にある場合、$\pi_\lambda(b_1)v_T=v_T$

(b) 1 が $T^{(2)}$ にある場合、$\pi_\lambda(b_1)v_T=-v_T$

(2) $i>1$ の場合

(a) T 上、$i-1$ と i が同じヤング図形の同じ行に現れる場合、$\pi_\lambda(b_i)v_T=v_T$

(b) T 上、$i-1$ と i が同じヤング図形の同じ列に現れる場合、$\pi_\lambda(b_i)v_T=-v_T$

(c) それ以外の場合、T において、$i-1$ と i を入れ替えたものは標準盤であり，それを $(i-1,i)T$ とおく。このとき、$\pi_\lambda(b_i)$ は V_λ の部分空間 $K_0v_T\oplus K_0v_{(i-1,i)T}$ に対して以下のように作用する。

$$\pi_\lambda(b_i)(v_T,v_{(i-1,i)T})=(v_T,v_{(i-1,i)T})M'\Big(d_{T,i,i-1},\frac{u_{\tau_T(i-1)}}{u_{\tau_T(i)}}\Big)$$

ここで、$M'\Big(k,y\Big)$ は以下で定義される 2×2 行列である。

$$M'\Big(k,y\Big)=\frac{1}{(q+1)(1-q^ky)}\begin{bmatrix}(q-1)(1+q^ky) & 2(1-q^{k+1}y)\\ 2q(1-q^{k-1}y) & -(q-1)(1+q^ky)\end{bmatrix}$$

この時、以下の事が成り立つ。

命題 5.2. $\tilde{\pi}_\lambda \cong \tilde{\pi}_{\bar{\lambda}}$

上記の同値を求めるためには Intertwining operator

$$\Psi:\tilde{V}_\lambda \longrightarrow \tilde{V}_{\bar{\lambda}} \qquad \Psi\tilde{\pi}_\lambda(b)=\tilde{\pi}_{\bar{\lambda}}(b)\Psi \quad \text{for all } b\in\mathcal{H}^1_{K_0,n}(u,q)$$

を構成すれば良い。以下にその構成法を示す。

$I=\{(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\mid i>j\}$ とし、$T\in\mathrm{STab}(\lambda)$ に対して、写像

$$\alpha_T: I\longrightarrow K_0$$

を以下で定義する。

$$\begin{aligned}\alpha_T(i,j)&=1 && i \text{ と } j \text{ が同じヤング図形の同行または同列にある場合}\\ &=\tau_T(i)-\tau_T(j) && i \text{ と } j \text{ が異なるヤング図形の同行、同列にある場合}\\ &=\frac{q(1-q^{d_{T,i,j}-1}u^{\tau_T(j)-\tau_T(i)})}{(q+1)(1-q^{d_{T,i,j}}u^{\tau_T(j)-\tau_T(i)})}\times\mathrm{sgn}(d_{T,i,j}) && \text{それ以外}\end{aligned}$$

さらに、$\psi:\mathrm{STab}(\lambda)\longrightarrow K_0$ を

$$\psi(T)=\prod_{i>j}\alpha_T(i,j)$$

とする。この時 Ψ は次で与えられる K_0 − 準同型 である。

$$\Psi(v_T)=\psi(T)v_{\bar{T}}$$

実際、$b\in\mathcal{H}_{K_0,n}(u,q)$ の作用を

$$\pi_\lambda(b)v_T=\sum_{T'\in\mathrm{STab}(\lambda)}\Big(\pi_\lambda(b)\Big)_{T,T'}v_{T'} \qquad \text{ただし、}\Big(\pi_\lambda(b)\Big)_{T,T'}\text{ は } K_0 \text{ の要素}$$

命題 5.3.

$$\pi_{\bar{\lambda}}(b_i)\Psi(T)v_{\bar{T}} = -\sum_{T'\in \mathrm{STab}(\lambda)} \Big(\pi_\lambda(b_i)\Big)_{T,T'} \Psi(T')v_{\bar{T}'} \qquad \textit{for } i = 1,2,\ldots,n$$

が成り立ち、このことから Ψ が Intertwining operator であることが示される。

次に基礎体を $\bar{K}_0$ とし、トータルサイズが 2 以上で $\lambda = \bar{\lambda}$ である場合を考える。この時、$\tilde{\pi}_\lambda$ は次数の等しい二つの表現に分解する。

STab(λ) の部分集合 STab(λ)$^+$ と STab(λ)$^-$ を以下のように定める。

$$\mathrm{STab}(\lambda)^+ = \{T \in \mathrm{STab}(\lambda) \mid 1 \text{ が } T^{(1)} \text{ にある}\}$$

$$\mathrm{STab}(\lambda)^- = \{T \in \mathrm{STab}(\lambda) \mid 1 \text{ が } T^{(2)} \text{ にある}\}$$

この時、次の二つが成り立つ。

(1) $\mathrm{STab}(\lambda) = \mathrm{STab}(\lambda)^+ \cup \mathrm{STab}(\lambda)^-$(disjoint union)

(2) $\lambda = \bar{\lambda}$ ならば、$T \in \mathrm{STab}(\lambda)^+ \iff \bar{T} \in \mathrm{STab}(\lambda)^-$ であり、写像 $T \longrightarrow \bar{T}$ により STab(λ)$^+$ と STab(λ)$^-$ は 1 対 1 に対応する。

$\lambda = \bar{\lambda}$ とし、$\tilde{V}_\lambda$ を $\tilde{\pi}_\lambda$ の表現空間とする。$\tilde{V}_\lambda$ の $\bar{K}_0$-ベクトル空間としての直和分解、

$$\tilde{V}_\lambda = \tilde{V}_\lambda^+ \oplus \tilde{V}_\lambda^-$$

$$\tilde{V}_\lambda^+ = \bigoplus_{T\in\mathrm{STab}(\lambda)^+} \bar{K}_0\left(\sqrt{\Psi(\bar{T})}v_T + \sqrt{\Psi(T)}v_{\bar{T}}\right)$$

$$\tilde{V}_\lambda^- = \bigoplus_{T\in\mathrm{STab}(\lambda)^+} \bar{K}_0\left(\sqrt{\Psi(\bar{T})}v_T - \sqrt{\Psi(T)}v_{\bar{T}}\right)$$

を考える。この時、

命題 5.4. $\lambda = \bar{\lambda}$ ならば、$\tilde{V}_\lambda^+$、$\tilde{V}_\lambda^-$ は $\tilde{V}_\lambda$ の非同値な $\mathcal{H}^1_{\bar{K}_0,n}(u,q)$-部分加群であり、

$$\tilde{V}_\lambda = \tilde{V}_\lambda^+ \oplus \tilde{V}_\lambda^-$$

は $\mathcal{H}^1_{\bar{K}_0,n}(u,q)$-加群としての直和分解になる。

$\tilde{V}_\lambda^+$ と $\tilde{V}_\lambda^-$ の次数が等しいことは明らかなので、$\lambda = \bar{\lambda}$ に対して、$\tilde{\pi}_\lambda$ は次数の等しい二つの部分表現に分解することがわかる。$\tilde{V}_\lambda^+$ と $\tilde{V}_\lambda^-$ に対応する $\mathcal{H}^1_{\tilde{K}_{0,n}}(u,q)$ の表現をそれぞれ $\tilde{\pi}_\lambda^+$、$\tilde{\pi}_\lambda^-$ と表す。

以上の結果に $S = \mathbb{Z}_2$ の場合の S-graded Clifford system の一般論および半単純環の一般論を用いると、次の結果が得られる。

定理 5.5. $\{\lambda_1, \bar{\lambda}_1, \lambda_2, \bar{\lambda}_2, \ldots, \lambda_p, \bar{\lambda}_p, \mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_q\}$ をトータルサイズが n である 2 つのヤング図形の組全体のなす集合で、$\lambda_i \neq \bar{\lambda}_i (i = 1, 2, \ldots, p)$、$\mu_j = \bar{\mu}_j (j = 1, 2, \ldots, q)$ とする。このとき、$\{\tilde{\pi}_{\lambda_i}, \tilde{\pi}_{\mu_j}^+, \tilde{\pi}_{\mu_j}^-\}_{j=1,2,\ldots,q}^{i=1,2,\ldots,p}$ は $\mathcal{H}^1_{\tilde{K}_{0,n}}(u,q)$ の $\tilde{K}_0$ 上の既約表現の完全代表系をなす。さらに、$\mathcal{H}^1_{\tilde{K}_{0,n}}(u,q)$ は半単純である。

References

[1] S. Ariki and K. Koike, A Hecke algebra of $(\mathbb{Z}/r\mathbb{Z}) \wr \mathfrak{S}_n$ and construction of its irreducible representations, *Adv. Math.* **106** (1994), 216–243.

[2] E. Cline, Stable Clifford theory, *J. Algebra.* **22** (1972), 350–364.

[3] C. W. Curtis and I. Reiner, "Methods of Representation Theory," Vol.1, John Wily & Sons, 1981.

[4] C. W. Curtis and I. Reiner, "Methods of Representation Theory," Vol.2, John Wily & Sons, 1987.

[5] R. Dipper and G. D. James, The q-Schur algebra, *Proc. London Math. Soc.* **59** (1989), 23–50.

[6] P. N. Hoefsmit, Representation of Hecke algebras of finite groups with BN-pairs of classical type, *Thesis* (1974), University of British Columbia.

[7] N. Iwahori, On the structure of a Hecke ring of a Chevalley group over a finite field, *J. Fac. Sci. Tokyo Univ.,* **10** (1964), 215–236.

[8] H. Mitsuhashi, The q-analogue of the alternating group and its representations, *J. Algebra.* **240** (2001), 535–558.

[9] H. Mitsuhashi, $\mathbb{Z}_2$-graded Clifford system in the Hecke algebra of type B, preprint.

[10] H. N. Ward, The analysis of representations induced from a normal subgroup, *Michigan Math. J.* **15** (1968), 417–428.

[11] 岩堀 長慶, 対称群と一般線型群の表現論（岩波講座　基礎数学）, 岩波書店, (1978)

[12] 近藤　武, 群論 II（岩波講座　基礎数学）, 岩波書店, (1976)